BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**

LỚP 12 THPT NĂM 2011

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Ngày thi: **11 và 12/01/2011**

(*Gồm 6 trang*)

Bài 1.

Xét số thực dương x tùy ý. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1} \qquad (1)$$

bằng phương pháp quy nạp theo n.

• Với $n = 1$, ta cần chứng minh

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \qquad (2)$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow$ $(x+1)^4 - 8x(x^2+1) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 \ge 0$.

Từ đó suy ra (2) là bất đẳng thức đúng và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

• Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Khi đó, ta có:

$$\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}.$$

Suy ra: $\dfrac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}.\dfrac{(x+1)^2}{4} \le \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{2k+3}$; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. (3)

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \le \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}.\frac{(x+1)^2}{4} \qquad (4)$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Thật vậy, ta có: (4) $\Leftrightarrow$ $(x^{k+1}+1)^2(x+1)^2 - 4x(x^k+1)(x^{k+2}+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^{k+1}-1)^2(x-1)^2 \ge 0$.

Từ đó suy ra (4) là bất đẳng thức đúng và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Kết hợp điều này với (3) suy ra

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}; \text{ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 1.$$

Điều đó chứng tỏ khi $n = k + 1$, (1) là bất đẳng thức đúng và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy, với n là số nguyên dương tùy ý, (1) là bất đẳng thức đúng với mọi số thực dương x và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. ■

Bài 2.

Với mọi $n \ge 1$, ta có

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n^2}.\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(n+1)}{n^2}\left(\frac{(n-1)^2}{2n}+1\right)x_n = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n.$$

Suy ra $\quad \dfrac{x_{n+1}}{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right).\dfrac{x_n}{n} \qquad \forall n \geq 1.$

Do đó, với mọi $n \geq 2$

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \left(\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} - 1\right)x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}.\frac{x_n}{n} = (1 + \frac{n+1}{n^2})\prod_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{1}{k^2}). \quad (1)$$

Từ đó, với lưu ý $y_1 = x_2 - x_1 = 3$, ta có $y_n > 0 \ \ \forall n \geq 1$, $y_1 < y_2$ và với mọi $n \geq 3$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{n^2+n+1}{n^2}.\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2+n}.\left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = 1 + \frac{2}{n^4 - n^3 + n^2} > 1.$$

Suy ra (y_n) là dãy số tăng. (2)

Vì với mọi $n \geq 2$, ta có $n+1 < n^2$ và $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{k^2}) \leq \left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}{n-1}\right)^{n-1}$ nên từ (1) ta được

$$y_n < 2\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}{n-1}\right)^{n-1} \qquad \forall n \geq 2. \quad (3)$$

Mà $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n-1} < 2 \qquad \forall n \geq 3$

nên từ (3) suy ra $y_n < 2\left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right)^{n-1} < 2e^2 \quad \forall n \geq 2.$

Do đó (y_n) là dãy số bị chặn trên. Kết hợp với (2) suy ra (y_n) là dãy hội tụ. ■

Bài 3.

1/ Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AE và BP.

Ta có $\widehat{ACE} = 90^0 + \widehat{BCE} = 90^0 + \widehat{FAB} = \widehat{EFP}$. Suy ra $\widehat{EFP} + \widehat{ECP} = 180^0$.

Do đó $CEFP$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{CFP} = \widehat{CEP} = 90^0$. Vì thế $CF \,//\, AB$. Suy ra

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FB}}.$$

Từ đó, xét tam giác ABP, ta có $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{CA}}.\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FP}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1.$

Vì thế, theo định lí Xê va, ba đường thẳng PO, AE và BC đồng quy. ■

2/ Đặt $BP = x$ và kí hiệu R là bán kính của (O).

Xét tam giác vuông ABP, ta có $PA = \sqrt{PB^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 4R^2}$.

Suy ra $\quad PC = \dfrac{PB^2}{PA} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4R^2}}$ và $AC = PA - PC = \dfrac{4R^2}{\sqrt{x^2+4R^2}}$.

Vì $CF \,//\, AB$ (cmt) nên $\dfrac{MC}{MB} = \dfrac{CF}{AB} = \dfrac{PC}{PA}$. Suy ra $\dfrac{BC}{MB} = \dfrac{PC}{PA} + 1 = \dfrac{PC + PA}{PA}$. Do đó

$$BM = \frac{PA.BC}{PC + PA} = \frac{PB.AB}{PC + PA} = \frac{Rx\sqrt{x^2 + 4R^2}}{x^2 + 2R^2}.$$

Vì vậy $S_{AMB} = \dfrac{1}{2}AB.BM.\sin\widehat{ABM} = \dfrac{1}{2}.2R.\dfrac{Rx\sqrt{x^2 + 4R^2}}{x^2 + 2R^2}.\dfrac{AC}{2R} = \dfrac{2R^3x}{x^2 + 2R^2}$.

Suy ra $S_{AMB} \le \dfrac{2R^3x}{2\sqrt{2}xR} = \dfrac{R^2}{\sqrt{2}}$ và $S_{AMB} = \dfrac{R^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}R$.

Vậy, tam giác AMB có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi P nằm cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}R$ (có hai vị trí như vậy); khi đó $S_{AMB} = \dfrac{R^2}{\sqrt{2}}$. ■

Bài 4.

Để chứng minh khẳng định của bài toán, ta sẽ chứng minh có thể phủ ngũ giác $ABCDE$ bởi 5 hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đó.

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét: Có thể phủ tam giác XYZ có độ dài các cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$ bởi 3 hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của tam giác đó.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, tồn tại điểm M thuộc tam giác XYZ mà M không thuộc bất cứ hình tròn nào trong các hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của tam giác đó. Khi đó, ta có $MX > 1$, $MY > 1$ và $MZ > 1$.

Dễ thấy, trong ba góc $\widehat{XMY}$, $\widehat{YMZ}$ và $\widehat{ZMX}$ phải có ít nhất một góc có số đo lớn hơn hay bằng 120^0. Không mất tổng quát, giả sử $\widehat{XMY} \ge 120^0$. Áp dụng định lí côsin cho tam giác XMY, ta được

$$XY^2 = MX^2 + MY^2 - 2MX.MY.\cos\widehat{XMY} > 1 + 1 + 2.\frac{1}{2} = 3 \quad (\text{do } \cos\widehat{XMY} \le -\frac{1}{2}).$$

Suy ra $XY > \sqrt{3}$, trái với giả thiết. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh.

Do các tam giác ABC, ACD và ADE có độ dài các cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$ nên theo Nhận xét trên, chúng lần lượt được phủ bởi các bộ ba hình tròn đơn vị ((A), (B), (C)), ((A), (C), (D)) và ((A), (D), (E)). Do đó, ngũ giác $ABCDE$ được phủ bởi 5 hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của ngũ giác đó. Theo nguyên lí Dirichlet, trong 5 hình tròn đó phải tồn tại hình tròn chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy. ■

Bài 5.

__Cách 1__:

Xét dãy số nguyên (b_n) xác định bởi

$$b_0 = 1,\ b_1 = -1 \quad \text{và} \quad b_n = 6b_{n-1} + 2016b_{n-2} \quad \text{với mọi } n \ge 2.$$

Dễ thấy với mọi $n \ge 0$, ta có $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$. (*)

Phương trình đặc trưng của dãy (b_n): $x^2 - 6x - 2016 = 0$, hay $(x - 48)(x + 42) = 0$.

Suy ra, số hạng tổng quát của dãy (b_n) có dạng: $b_n = C_1.(-42)^n + C_2.48^n$.

Từ các điều kiện ban đầu của dãy (b_n), ta được $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 42C_1 - 48C_2 = 1. \end{cases}$

Suy ra $C_1 = \dfrac{49}{90}$ và $C_2 = \dfrac{41}{90}$. Vì vậy $b_n = \dfrac{49.(-42)^n + 41.48^n}{90}$ $\forall n \geq 0$.

Vì 2011 là số nguyên tố nên theo định lí Phecma nhỏ, ta có:

$$(-42)^{2010} \equiv 48^{2010} \equiv 1 (\bmod 2011).$$

Do đó $90b_{2012} \equiv 49.(-42)^{2012} + 41.48^{2012} \equiv 49.(-42)^2 + 41.48^2 \equiv 90b_2 (\bmod 2011)$.

Suy ra $b_{2012} \equiv b_2 (\bmod 2011)$ (vì $(90, 2011) = 1$).

Mà $b_2 = 6b_1 + 2016b_0 = 2010$ nên $b_{2012} \equiv 2010 (\bmod 2011)$.

Vì thế $a_{2012} \equiv 2010 (\bmod 2011)$ (theo (*)). ■

<u>Cách 2</u>:

+ Số hạng tổng quát của dãy (a_n):

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 + \sqrt{14}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 - \sqrt{14}\right)^n. \quad (1)$$

+ Đặt $p = 2011$, ta có:

$$a_{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 + \sqrt{14}\right)^{p+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 - \sqrt{14}\right)^{p+1}.$$

Do $\left(3 + \sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} + B_{p+1}.\sqrt{14}$ và $\left(3 - \sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} - B_{p+1}.\sqrt{14}$, trong đó

$$A_{p+1} = \sum_{i=0}^{(p+1)/2} C_{p+1}^{2i}.3^{2i}.14^{\frac{p+1}{2}-i} \quad (2)$$

và

$$B_{p+1} = \sum_{i=1}^{(p+1)/2} C_{p+1}^{2i-1}.3^{2i-1}.14^{\frac{p+1}{2}-i}, \quad (3)$$

nên $a_{p+1} = A_{p+1} - 4B_{p+1}$. (4)

+ Do p là số nguyên tố nên $C_p^k \equiv 0 (\bmod p)$ $\forall k = \overline{1, p-1}$. Do đó, từ $C_{p+1}^k = C_p^k + C_p^{k-1}$ suy ra $C_{p+1}^k \equiv 0 (\bmod p)$ $\forall k = \overline{2, p-1}$. Vì vậy, từ (2) và (3), ta được:

$$A_{p+1} \equiv (14^{(p+1)/2} + 3^{p+1}) (\bmod p)$$

và

$$B_{p+1} \equiv 3(p+1)(14^{(p-1)/2} + 3^{p-1}) \equiv 3(14^{(p-1)/2} + 3^{p-1}) (\bmod p).$$

Do đó, từ (4) suy ra $a_{p+1} \equiv (-3^p + 2.14^{(p-1)/2}) (\bmod p)$. (5)

Để ý rằng $45^2 \equiv 14 (\bmod p)$ và $(45, p) = 1$, theo định lí Phecma nhỏ ta có:

$$3^p \equiv 3 (\bmod p) \text{ và } 14^{(p-1)/2} \equiv 45^{p-1} \equiv 1 (\bmod p).$$

Do đó, từ (5) ta được $a_{2012} = a_{p+1} \equiv -3 + 2 = -1 \equiv 2010 (\bmod 2011)$. (***Đpcm***)

Chú ý: *Đối với bài làm của thí sinh theo Cách 2, yêu cầu trình bày chi tiết các bước tìm số hạng tổng quát* a_n.

Bài 6.

Do $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ là các góc nhọn nên E nằm trên tia đối của tia AB hoặc nằm trong cạnh AB, đồng thời F nằm trong cạnh AC hoặc nằm trên tia đối của tia AC. Vì thế, từ định nghĩa các điểm M, N, P suy ra E, M, N thẳng hàng và M, F, P thẳng hàng.

Do đó $\widehat{NMP} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{AEF} + \widehat{AFE}\right) = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Suy ra: A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi $\widehat{NAP} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. (1)

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$\widehat{NAP} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$ khi và chỉ khi d đi qua tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (2)

Không mất tổng quát, giả sử $AB < AC$. (3)

• *Điều kiện cần*: Giả sử $I \in d$. Khi đó, từ (3) suy ra E nằm trên tia đối của tia AB và F nằm trong cạnh AC.

Qua A, kẻ đường thẳng Ax (khác AC) tiếp xúc với (P). Ta sẽ chứng minh Ax tiếp xúc với (N).

Thật vậy, gọi T, T_1, T_2, T_3 lần lượt là tiếp điểm của (P) và Ax, CD, DF, FC. Gọi S là giao điểm của Ax và DF. Ta có: $AT = AT_3$, $CT_3 = CT_1$, $DT_1 = DT_2$ và $ST_2 = ST$.

Do đó $AS - SD = (AT - ST) - (DT_2 - ST_2) = AT_3 - DT_1 = AC - CD$. (4)

Vì $I \in d$ nên D là tiếp điểm của (I) và cạnh BC. Suy ra $AC - CD = AB - BD$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $AS + BD = AB + SD$. Vì thế $ABDS$ là tứ giác ngoại tiếp. Suy ra Ax tiếp xúc với (N).

Từ đó, ta có $\widehat{NAP} = \widehat{NAx} + \widehat{xAP} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAx} + \dfrac{1}{2}\widehat{xAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$.

• *Điều kiện đủ*: Giả sử $\widehat{NAP} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$. Xét hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1*: *E nằm trên tia đối của tia AB và F nằm trong cạnh AC*.

Qua A, kẻ tiếp tuyến Ax (khác AC) của (P) cắt DF tại S. Ta có

$$\widehat{NAx} = \widehat{NAP} - \widehat{xAP} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{xAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAx}.$$

Suy ra Ax tiếp xúc với (N). Do đó $ABDS$ là tứ giác ngoại tiếp. Suy ra

$$AS + BD = AB + SD.$$

Hơn nữa, theo chứng minh ở phần trên, ta có $AS - SD = AC - CD$. (Xem (4)).

Từ đó, ta được $BD = AB + CD - AC$. Suy ra $2BD = AB + BC - AC$.

Do đó $BD = p - b$, trong đó $p = \dfrac{AB+BC+CA}{2}$ và $b = AC$.

Suy ra $BD = BK$, trong đó K là tiếp điểm của (I) và cạnh BC.

Từ đó, do D và K cùng nằm trong cạnh BC, suy ra $D \equiv K$. Vì vậy $I \in d$.

- *Trường hợp 2*: *E nằm trong cạnh AB và F nằm trên tia đối của tia AC*.

Khi đó, do (3) nên $CD > CK$. (∗)

Mặt khác, dễ thấy, trong trường hợp này B đóng vai trò của C và C đóng vai trò của B, E đóng vai trò của F và F đóng vai trò của E, (N) đóng vai trò của (P) và (P) đóng vai trò của (N) trong trường hợp trước. Vì thế, theo chứng minh trên, ta phải có $CD = CK$, mâu thuẫn với (∗). Mâu thuẫn nhận được cho thấy trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy, (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) hiển nhiên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu của đề bài. ■

Bài 7.

Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại các đa thức với hệ số thực $G(x, y)$ và $H(x, y)$, khác đa thức hằng, sao cho

$$P(x, y) = G(x, y).H(x, y), \quad (1)$$

trong đó $P(x,y) = x^n + xy + y^n$, $n \in N^*$.

Viết $G(x, y)$ và $H(x, y)$ dưới dạng các đa thức của x:

$$G(x,y) = g_m(y).x^m + g_{m-1}(y).x^{m-1} + ... + g_1(y).x + g_0(y), \quad m \in N;$$

$$H(x,y) = h_k(y).x^k + h_{k-1}(y).x^{k-1} + ... + h_1(y).x + h_0(y), \quad k \in N;$$

trong đó $g_i(y),\ i = \overline{0,m}$, và $h_j(y),\ j = \overline{0,k}$, là các đa thức với hệ số thực của y.

Từ (1) suy ra:

\+ $m + k = n$, (2)

\+ Với $n \geq 2$, $g_m(y), h_k(y)$ là các đa thức hằng và do đó chúng không là bội của y. (3)

Từ (3), do $G(x, y)$ và $H(x, y)$ khác đa thức hằng nên nếu $n \geq 2$ thì $m, k \geq 1$. (4)

• Xét $n = 1$. Khi đó, theo (2), ta có $m + k = 1$. Suy ra $m = 0$ và $k = 1$, hoặc $m = 1$ và $k = 0$.

Giả sử $m = 0$ và $k = 1$. (Trường hợp $m = 1$ và $k = 0$ xét tương tự). Khi đó, ta có

$$(y+1)x + y = g_0(y).h_1(y)x + g_0(y).h_0(y).$$

Suy ra $g_0(y)(h_1(y) - h_0(y)) = 1$. Vì thế, $g_0(y)$ là đa thức hằng, mâu thuẫn với giả thiết $G(x, y)$ khác đa thức hằng.

• Xét $n \geq 2$.

Gọi i_0 và j_0 là các chỉ số bé nhất sao cho $g_{i_0}(y)$ và $h_{j_0}(y)$ là các đa thức không là bội của y.

Dễ thấy, hệ số của $x^{i_0+j_0}$ trong khai triển của $G(x, y).\ H(x, y)$ là

$$g_0(y).h_{i_0+j_0}(y) + g_1(y).h_{i_0+j_0-1}(y) + ... + g_{i_0}(y).h_{j_0}(y) + g_{i_0+1}(y).h_{j_0-1}(y) + ... + g_{i_0+j_0}(y).h_0(y)$$

Từ định nghĩa của i_0 và j_0 suy ra hệ số trên không chia hết cho y. Vì thế, từ (1), với lưu ý rằng P chỉ có duy nhất hệ số của x^n không chia hết cho y, suy ra $i_0 + j_0 = n$. Do đó $i_0 = m$ và $j_0 = k$. Kết hợp với (4) suy ra phải có $m = 1$ hoặc $k = 1$, vì nếu trái lại, $m, k > 1$, thì từ việc cân bằng hệ số của x ở hai vế của (1) ta sẽ có $y = g_0(y).h_1(y) + g_1(y).h_0(y) \vdots y^2$, là điều vô lí.

Giả sử $m = 1$. (Trường hợp $k = 1$ xét tương tự). Khi đó, ta có

$$x^n + xy + y^n = (ax + g_0(y))(bx^{n-1} + h_{n-2}(y).x^{n-2} + ... + h_1(y).x + h_0(y)), \quad (5)$$

trong đó a, b là các hằng số thực, với $ab = 1$.

Từ (5) ta được $y^n = g_0(y).h_0(y)$. Suy ra $g_0(y) = a'y^s$, trong đó $s \in N^*$, $s \leq n$ và a' là một hằng số thực khác 0.

Đặt $c = -\dfrac{a'}{a}$, ta có $c \neq 0$. Thế $x = cy^s$ vào (5), ta được

$$c^n y^{sn} + cy^{s+1} + y^n \equiv 0. \quad (6)$$

\+ Nếu $s = 1$ và $n = 2$ thì từ (6) ta được $(c^2 + c + 1)y^2 \equiv 0$. Suy ra $c^2 + c + 1 = 0$, là điều vô lí.

\+ Nếu $s = 1$ và $n > 2$ thì từ (6) ta được $(c^n + 1)y^n + cy^2 \equiv 0$, là điều vô lí (vì $c \neq 0$).

\+ Nếu $s \geq 2$ và $n \geq 2$ thì $sn > n$ và $sn > s + 1$. Do đó (6) là điều vô lí, vì $c \neq 0$.

• Vậy, tóm lại, điều giả sử ban đầu là sai và vì thế ta có điều đề bài yêu cầu chứng minh. ■
