

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 11/01/2011

Bài 1 (5,0 điểm). Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng với mọi số thực dương x , ta có bất đẳng thức:

$$\frac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2 (5,0 điểm). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1 \quad \text{và} \quad x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = x_{n+1} - x_n$.

Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 3 (5,0 điểm). Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) đường kính AB . Xét một điểm P di động trên tiếp tuyến tại B của (O) sao cho P không trùng với B . Đường thẳng PA cắt (O) tại điểm thứ hai C . Gọi D là điểm đối xứng với C qua O . Đường thẳng PD cắt (O) tại điểm thứ hai E .

1/ Chứng minh rằng các đường thẳng AE , BC và PO cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là M .

2/ Hãy xác định vị trí của điểm P sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo bán kính của đường tròn (O) .

((O) kí hiệu đường tròn tâm O).

Bài 4 (5,0 điểm). Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo AC , AD không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đã cho chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.